ΝΕΟ ΜΑΘΗΜΑ (ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΩΝ)

δ) Εστω η συνάρτηση $f(\bar{x}) = \dfrac{1}{\|\bar{x}-\bar{a}\|}$, $\bar{x} \neq \bar{a}$

Να εξετάσετε για ποια $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ η f εχει οριο στο $\bar{x}_0$ και ποιο αυτο;

<u>ΛΥΣΗ</u>

Προφανώς για την $f: U \to \mathbb{R}$ με $U = \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ παίρνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

<u>1η περίπτωση:</u> Εστω $\bar{x}_0 \neq \bar{a} \Rightarrow \|\bar{x}_0 - \bar{a}\| \neq 0$

και έστω $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \Leftrightarrow \|\bar{x}_\nu - \bar{x}_0\| \to 0$

ενώ $\bar{x}_\nu - \bar{a} \xrightarrow[\nu\to\infty]{} \bar{x}_0 - \bar{a} \Rightarrow \|\bar{x}_\nu - \bar{a}\| \to 0$

Συνεπώς και

$$f(\bar{x}_\nu) = \frac{1}{\|\bar{x}_\nu - \bar{a}\|} \longrightarrow \frac{1}{\|\bar{x}_0 - \bar{a}\|} = f(\bar{x}_0)$$

Άρα $f(\bar{x}_\nu) \xrightarrow[\nu\to\infty]{} f(x_0)$ όπου $\bar{x}_\nu \neq \bar{x}_0$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$

<u>2η περίπτωση:</u> Εστω $\bar{x}_0 = \bar{a} \Leftrightarrow \|\bar{x}_0 - \bar{a}\| = 0$

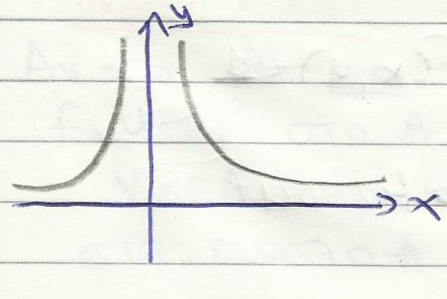
και έστω $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 = \bar{a} \Rightarrow \|\bar{x}_\nu - \bar{a}\| \to 0$

Επομένως, $\dfrac{1}{\|\bar{x}_\nu - \bar{a}\|} \xrightarrow[\nu\to 0]{} \infty$ άρα η $f(x_\nu) \to \infty$

δηλ. δεν έχει όριο (στον $\mathbb{R}$)

αυτό ισχυει στο <u>πχ</u> ότι για $n=2$ άρα στον $\mathbb{R}^2$ έχουμε το $\bar{a} = (0,0)$. ΔΗΛ. $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{1}{\|(x,y)-(0,0)\|}$

όπου $(x,y) \neq (0,0)$



ε) Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y)=\begin{cases} 1, & x\geq 0 \wedge y\geq 0 \\ 0, & x<0 \vee y<0 \end{cases} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

Να εξεταστεί για ποιο $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ $\exists \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ καθώς να βρεθεί το όριο του.

ΛΥΣΗ

Τα σημεία $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0): x\geq 0\}$ εσωτερικά του συνόλου (δηλ του A) $\cup \{(0,y): y\geq 0\} = A$ ή αλλιώς το A ανοιχτό (*)

(*) Τα σύνολα $\{(x,0): x\geq 0\}\subseteq\mathbb{R}^2$ και $\{(0,y): y\geq 0\}\subseteq\mathbb{R}^2$ είναι κλειστά στο $\mathbb{R}^2$ αφού για κάθε ακολουθία επος αυτών, όπου συγκλίνει, το όριο βρίσκεται επίσης μέσα σε αυτά τα σύνολα.

Έπειτα, ισχύει η παρακάτω πρόταση.

(ΠΡΟΤΑΣΗ: $U\subseteq\mathbb{R}^n$ κλειστό $\iff (\forall \bar{x}_\nu)\subseteq U$ $\bar{x}_\nu\to\bar{x}\in\mathbb{R}^n: \bar{x}\in U$)

άρα αν την εφαρμόσουμε στο σύνολο $\{(x,0): x\geq 0\}$ έχουμε ότι: $x_\nu\geq 0$ και $y_\nu=0$ $\forall\nu\in\mathbb{N}$ και $\bar{x}_\nu\to\bar{x}$ ενώ $\bar{y}_\nu\to\bar{y}$. Τότε $y=0$ και $x\geq 0$ συνεπώς $(x,y)\in\{(x,0): x\geq 0\}$

Αφού το A ανοιχτό, τότε $(\forall (x_0,y_0)\in A)(\exists B((x_0,y_0),\varepsilon))$ με $\varepsilon>0$ ώστε $B((x_0,y_0),\varepsilon)\subseteq A$, Άρα έχουμε ότι: $\forall (x_\nu,y_\nu)\to(x_0,y_0)$ $(\exists \nu_0\in\mathbb{N})(\forall \nu>\nu_0)$: $(x_\nu,y_\nu)\in B((x_0,y_0),\varepsilon)$

Για $(x,y)\in B((x_0,y_0),\varepsilon)$ έχουμε $f(x,y)=1$ ή $f(x,y)=0$ $(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2)$

άρα σε αυτή την περίπτωση, έχουμε ότι:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=1$$

(*) Για σημεία $\{(x_0,0): x_0\geq 0\}$ η f δεν έχει όριο αφού πχ $(x_0,\frac{1}{\nu})\to(x_0,0)$ και $f(x_0,\frac{1}{\nu})\to 1$ ενώ $(x_0,-\frac{1}{\nu})\to(x_0,0)$ και $f(x_0,-\frac{1}{\nu})\to 0$

ομοια και για τα σημεια $\{(0,y) : y \geq 0\}$

στ) Εστω $f(\bar{x}) = \frac{\sin \|\bar{x}\|}{\|\bar{x}\|}$, $\bar{x} \neq \bar{0}$.

ΝΔΟ $\lim_{\bar{x} \to \bar{0}} f(\bar{x}) = 1$

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση $h(y) = \begin{cases} \frac{\sin y}{y}, & y \neq 0 \\ 1, & y = 0 \end{cases}$

ειναι συνεχής διοτί $\lim_{y \to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$

από την άλλη η συνάρτηση $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \mapsto \|\bar{x}\|$

έχει οριο $\lim_{\bar{x} \to \bar{0}} \|\bar{x}\| = 0 = \ell$

(αφου $\forall \bar{x}_\nu \to \bar{0} \xRightarrow{\bar{x} \to \bar{0}} \|\bar{x}_\nu\| \to 0$)

Αρα, απο θεωρία $(h \circ f)(x)$ με $f(\bar{x}) = \|\bar{x}\|$

εχει οριο στο $\bar{x}_0 = \bar{0}$, το $h(\lim_{x \to 0} f(\bar{x})) = h(0) = 1$

§ 2.2. Συνέχεια πραγματικών συναρτήσεων

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ λεγεται:

α) Συνεχής στο $\bar{x}_0 \in U \Leftrightarrow \forall (\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 : f(\bar{x}_\nu) \to f(\bar{x}_0)$

β) Συνεχής στο $A \subseteq U \Leftrightarrow$ η f συνεχής σε καθε $\bar{x}_0 \in A$

γ) Συνεχής $\Leftrightarrow$ η f συνεχής σε καθε $\bar{x}_0 \in U$

Παρατήρηση!

Αν το A οχι ανοικτο μπορεί ο περιορισμός της $f : U \to \mathbb{R}$ στο A δηλ $f/_A : A \to \mathbb{R}$, $(f/A)(\bar{x}) = f(\bar{x})$ $\forall x \in A$ να είναι συνεχης, ενω η f οχι συνεχης στο συνολο A

πχ

• Η συνάρτηση $f(x,y)=\begin{cases}1, & x\geq 0 \wedge y\geq 0\\ 0, & x<0 \vee y<0\end{cases}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

είναι συνεχής

στα $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0):x\geq 0\}\cup\{(0,y):y\geq 0\}$

ενώ είναι ασυνεχής στα σημεία

$\{(x_0,0):x_0\geq 0\}\cup\{(0,y_0):y_0\geq 0\}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ η $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ όχι συνεχής

από την άλλη η συνάρτηση

βλέπε άσκηση (ε) σελ. 32 αντιπαράδειγμα.

• $f|_{[0,+\infty)\times[0,+\infty)}:[0,+\infty)\times(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ είναι σταθ.

και μάλιστα ίση με $\underline{1}$ και άρα συνεχής.